УДК 519.6

Д. А. Верлань, студент
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, м. Київ

ІТЕРАЦІЙНІ АЛГОРИТМИ АПРОКСИМАЦІЇ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

Розглядаються ітераційні алгоритми апроксимації функції двох змінних сумами парних добутків функцій однієї змінної, які формуються в сенсі мінімуму квадратичної нев'язки.

Ключові слова: *апроксимація, чисельний алгоритм, функція двох змінних, квадрат нев'язки.*

Вступ. Подання функцій двох змінних у зручному для обчислення вигляді — актуальна задача при розв'язуванні багатьох дослідницьких та проектних проблем в математичній фізиці, електроніці, біофізиці, системах вимірювання, керування, та в багатьох інших наукових та прикладних областях.

В обчислювальній математиці існує достатньо ефективний підхід до апроксимації функцій двох змінних, який ґрунтується на попередньому виборі однієї або двох систем координатних функцій і наступному відшуканні коефіцієнтів розкладу вихідної функції з умов зворотного критерію оптимальності. Розглянемо відповідні чисельні алгоритми апроксимації функцій двох змінних, які характеризується тим, що самі функції однієї змінної, сума парних добутків, яка апроксимує вихідну функцію, формуються оптимально в сенсі мінімуму квадратичної нев'язки. Ідея методу вперше була запропонована в роботах [1, 2], але поки що не була повною мірою досліджена та реалізована у вигляді прикладних програмних засобів. Слід відмітити також, що застосування вказаного підходу до апроксимації ядер інтегральних рівнянь, як функцій двох змінних, дозволяє отримати ефективні чисельні алгоритми розв'язування.

Теоретичним обґрунтуванням цього методу можна вважати роботу А.Н. Колмогорова [3], про представлення неперервних функцій декількох змінних у вигляді суперпозиції неперервних функцій однієї змінної. Наприклад: для будь-якого $n \geq 2$ існують такі визначені на одиничному відрізку $E^1 = [0; 1]$ неперервні дійсні функції $\psi^{pq}(x)$, що кожна визначена на n-мірному одиничному кубі $E^n = [0; 1]^n$ неперервна дійсна функція $f(x_1, ..., x_n)$ може подаватись як

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{q=1}^{q=2n+1} \chi_q \left[\sum_{p=1}^{n} \psi^{pq}(x_p) \right],$$

де функції $\chi_q(y)$ дійсні і неперервні. Подальший розвиток цієї теорії можна знайти в роботі [4].

Постановка задачі. Будемо розглядати задачу наближення функції двох змінних у наступному вигляді. Нехай задана функція $K(x,s)$ інтегрована в квадраті ($a \le x \le b$, $a \le s \le b$). Необхідно апроксимувати її сумою $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j(x)\beta_j(s)$, виходячи з умови мінімуму квадратичного функціоналу

$$\Phi = \int_a^b \int_a^b \left[K(x,s) - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(x)\beta_j(s) \right]^2 dxds \;. \tag{1}$$

Тобто, необхідно отримати наближення у вигляді

$$K(x,s) \cong \sum_{j=1}^{N} \alpha_i(x)\beta_i(s) \;. \tag{2}$$

Алгоритм I. Схема методу полягає в тому, що спочатку знаходиться перше наближення функції $K(x,s)$ у вигляді одного доданку $\alpha_1(x)\beta_1(s)$. Цей, перший, доданок формуємо наступним чином: задаємо $\beta^{(0)}_1(s)$ — початкове наближення функції $\beta_1(t)$ та з умов мінімуму функціоналу

$$\Phi_1^{(0,0)} = \int_a^b \int_a^b \left[K(x,s) - \alpha_1^{(0)}(s)\beta_1^{(0)}(t) \right]^2 dxds \tag{3}$$

знаходимо $\alpha_1^{(0)}(x)$ — початкове наближення $\alpha_1(x)$.

Відомим варіаційним методом знаходимо, що для виконання умови мінімуму функціоналу, визначеного виразом (3), необхідно, щоб

$$\alpha_1^{(0)}(x) = \frac{\int_a^b K(x,s)\beta_1^{(0)}(s)ds}{\int_a^b (\beta_1^{(0)}(s))^2 ds} \;. \tag{4}$$

Потім уточнюючи функції $\alpha_1^{(0)}(x)$ та $\beta^{(0)}_1(s)$ з умов мінімуму функціоналу отримаємо:

$$\Phi_1^{(0,1)} = \int_a^b \int_a^b \left[K(x,s) - \alpha_1^{(0)}(x)\beta_1^{(1)}(s) \right]^2 dxds \,, \tag{5}$$

далі відшуковуємо $\beta_1^{(1)}(s)$ — перше наближення функції $\beta_1(s)$:

$$\beta_1^{(1)}(s) = \frac{\int_a^b K(x,s)\alpha_1^{(0)}(x)dx}{\int_a^b (\alpha_1^{(0)}(x))^2 dx} \qquad (6)$$

і т. д. Процес припиняється, як тільки виконуються умови:

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b (\beta_1^{(N+1)}(s) - \beta_1^{(N)}(s))^2 \le \varepsilon_1, \\ &\int_a^b (\alpha_1^{(N+1)}(x) - \alpha_1^{(N)}(x))^2 \le \varepsilon_2, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

де ε_1 та ε_2 — показники заданої точності обчислення функцій $\beta_1(s)$ та $\alpha_1(x)$.

На наступному кроці, аналогічно наближаємо функцію $K(x,s) - -\alpha_1(x)\beta_1(s)$ добутком $\alpha_2(x)\beta_2(s)$, виходячи з того ж критерію оптимальності (1), і т.д. Таким чином, отримуємо ряд $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j(x)\beta_j(s)$, який з заданою точністю апроксимує вихідну функцію $K(x,s)$.

Алгоритм II. Для побудови апроксимуючого ряду можна застосувати інший спосіб, який відрізняється від попереднього тим, що задається одночасно N функцій $\beta_j^{(0)}(s)$, $(j = \overline{1,N})$, які представляють початкові наближення функцій $\beta_j(s)$ (кількість членів апроксимуючого ряду при цьому вибирається попередньо).

Початкове наближення для функцій $\alpha_j(x)$ $(j = \overline{1,N})$ обчислюється з умов мінімуму функціоналу

$$\Phi_{jt}^{(0)} = \int_a^b \left[K(x,s_j) - \sum_{i=1}^{N} \alpha_{ij}^{(0)} \beta_{ij}^{(0)} \right]^2 ds, \quad j = \overline{1,N},$$

де $\beta_{ij}^{(0)} = \beta_i^{(0)}(t_j)$, $\alpha_{ij}^{(0)} = \alpha_i^{(0)}(s_j)$.

Далі процес апроксимації полягає в побудові та мінімізації функціоналів

$$\Phi_{jt}^{(1)} = \int_a^b \left[K(x,s_j) - \sum_{i=1}^{N} \alpha_{ij} \beta_i^{(1)}(s) \right]^2 ds,$$

$$\Phi_{js}^{(1)} = \int_a^b \left[K(x_j, s) - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^{(1)}(x)\beta_{ij} \right]^2 dx,$$

і далі $\Phi_{js}^{(2)}$, $\Phi_{jt}^{(2)}, \ldots, \Phi_{js}^{(k)}, \Phi_{jt}^{(k+1)}$, що дозволяє на деякому k-му наближенні $\alpha_i^{(k)}(s)$ та $\beta_i^{(k)}(t)$ досягнути можливої для даного N точності апроксимації.

Обчислення власних значень та функцій ядра. Описані вище алгоритми, застосовані до апроксимації ядра інтегрального рівняння, дозволяють обчислити його власні числа та власні функції.

Проаналізуємо властивості функцій $\alpha_1(x)$ та $\beta_1(s)$. Для виконання умов мінімуму функціоналу (1) необхідно, щоб $\alpha_1(x)$ та $\beta_1(s)$ задовольняли системі інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_1(s) = \dfrac{\int_a^b K(x,s)\beta_1(s)ds}{\int_a^b \beta_1^2(s)ds}, \\ \beta_1(t) = \dfrac{\int_a^b K(x,s)\alpha_1(x)dx}{\int_a^b \alpha_1^2(x)dx}. \end{cases} \tag{8}$$

Тоді мінімум функціоналу (1) визначається виразом

$$\Phi_{1\min} = \int_a^b\int_a^b K^2(x,s)dsdt - \int_a^b \beta_1^2(s)ds \int_a^b \beta_1^2(x)dx\ . \tag{9}$$

Розв'язуючи систему (9) методом послідовних наближень отримаємо процедуру, яка вказана вище. Тобто ця система зводиться до інтегрального рівняння відносно $\alpha_1(x)$:

$$\alpha_1(x) = \frac{\int_a^b \overline{K}(x,x_1)\alpha_1(x_1)dx_1 \int_a^b a_1^2(x)dx}{\int_a^b \left(\int_a^b K(x,s)\alpha_1(x)dx \right)^2 ds}, \tag{10}$$

де $\overline{K}(x,x_1) = \int_a^b K(x,s)K(x_1,s)ds$ — симетрична функція.

Аналогічне рівняння отримаємо відносно $\beta_1(s)$:

$$\beta_1(s) = \frac{\int\limits_a^b \tilde{K}(s,s_1)\beta_1(s_1)ds_1 \int\limits_a^b \beta_1^2(s)ds}{\int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b K(x,s)\beta_1(s)ds \right)^2 dx}, \tag{11}$$

де $\tilde{K}(s,s_1) = \int\limits_a^b K(x,s)K(x,s_1)dx$ — відповідне симетричне ядро.

Інтегральні рівняння (10) та (11) можна записати в більш компактному вигляді, відповідно:

$$\alpha_1(s) = \mu_{1a} \int\limits_a^b \overline{K}(x,x_1)\alpha_1(x_1)dx_1, \tag{12}$$

$$\beta_1(t) = \mu_{1b} \int\limits_a^b \tilde{K}(s,s_1)\beta_1(s_1)ds_1, \tag{13}$$

де

$$\mu_{1a} = \frac{\int\limits_a^b \alpha_1^2(x)dx}{\int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b K(x,s)\alpha_1(x)dx \right)^2 ds}, \tag{14}$$

$$\mu_{1b} = \frac{\int\limits_a^b \beta_1^2(s)ds}{\int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b K(x,s)\beta_1(s)ds \right)^2 ds}. \tag{15}$$

Звідси легко бачити, що функції $\beta_1(s)$ та $\alpha_1(x)$ є власними функціями, μ_{1a} та μ_{1b} — характеристичними числами інтегральних операторів з ядрами $\overline{K}(x,x_1)$ та $\tilde{K}(s,s_1)$ відповідно. При цьому з системи (8) та виразів (14), (15) отримуємо:

$$\mu_{1a} = \mu_{1b} = \frac{1}{\int\limits_a^b \beta_1^2(s)ds \int\limits_a^b \alpha_1^2(x)dx}.$$

Абсолютно очевидно, що система (8) або, що теж саме рівняння (10) і (11), як рівняння з симетричними ядрами можуть мати злічену множину розв'язків (злічену множину власних функцій оператора). Якщо розв'язувати їх, наприклад (11), методом послідовних наближень

$$\beta_1^{(n+1)}(s) = \frac{\int_a^b \tilde{K}(s,s_1)\beta_1^{(n)}(s_1)ds_1 \int_a^b (\beta_1^{(n)}(s))^2 ds}{\int_a^b \left(\int_a^b K(x,s)\beta_1^{(n)}(t)ds \right)^2 dx}, \qquad (16)$$

то спочатку з'являється питання про збіжність хоча б до якогось розв'язку рівняння (11).

Відповідно до методу Келлога [5], послідовність функцій $\frac{\omega_n(s)}{\|\omega_n\|}$,

де $\omega_n(s) = K^n \omega$ (індекс ітерації оператора K, $n = 1, 2, 3, \dots$), $\omega(x)$ — довільна функція класу $L_2(a,b)$ при $n \to \infty$ збігається до власної функції симетричного ядра $K(x,s)$, яке відповідає найменшому характеристичному числу μ, що є границею числової послідовності $\frac{\|\omega_{n-1}\|}{\|\omega_n\|}$. Якщо $\omega(s)$ ортогональна власним функціям $\phi_1(x), \dots, \phi_{k-1}(x)$ і не ортогональна $\phi_k(x)$, то границею послідовності $\frac{\omega_n(x)}{\|\omega_n\|}$ буде $\phi_k(x)$. Враховуючи це при $n \to \infty$ послідовність $\beta_1^{(n+1)}(s)$, визначена виразом (16), збігається до власної функції ядра $\tilde{K}(s,s_1)$, а $\frac{\int_a^b (\beta_1^{(n)}(s))^2 ds}{\int_a^b \left(\int_a^b K(x,s)\beta_1^{(n)}(t)ds \right)^2 dx}$ — до відповідного власного значення. Неважко переконатися, перемноживши обидві частини виразу (16) на $\beta_1^{(n)}(s)$ та проінтегрувавши по s, що

$$\int_a^b \beta_1^{(n+1)}(s)\beta_1^{(n)}(x)ds \geq \int_a^b (\beta_1^{(n)}(s))^2 ds, \qquad (18)$$

звідки слідує

$$\int_a^b \beta_1^{(n+1)}(s)ds \geq \int_a^b \beta_1^{(n)}(s)ds \ . \qquad (19)$$

Все вище сказане аналогічне і по відношенню до функції $\alpha_1(x)$. За допомогою нерівності (18) та виразу (9), що визначає мінімум функціоналу (1), легко показати, що із збільшенням числа ітерацій під час розв’язання системи (8) методом послідовних наближень квадратична нев’язка

$$\int_a^b \int_a^b \left[K(x,s) - \alpha_1(x)\beta_1(s) \right]^2 dxds$$

монотонно спадає. Якщо ввести позначення:

$$\Phi_{1\min}^{(n)} = \int_a^b \int_a^b K^2(x,s)dxds - \int_a^b (\beta_1^{(n)}(s))^2 ds \int_a^b (\alpha_1^{(n)}(x))^2 dx \ , \qquad (19)$$

$$\Phi_{1\min}^{(n+1)} = \int_a^b \int_a^b K^2(x,s)dxds - \int_a^b (\beta_1^{(n+1)}(s))^2 ds \int_a^b (\alpha_1^{(n+1)}(x))^2 dx \ , \qquad (20)$$

то віднімаючи (19) від (20), отримаємо

$$\Phi_{1\min}^{(n)} - \Phi_{1\min}^{(n+1)} = \int_a^b (\beta_1^{(n+1)}(s))^2 ds \int_a^b (\alpha_1^{(n+1)}(x))^2 dx - \int_a^b (\beta_1^{n}(s))^2 ds \int_a^b (\alpha_1^{n}(x))^2 dx.$$

Із нерівності (18) і аналогічно з нерівності для функцій $\alpha_1^n(x)$ видно, що

$$\Phi_{1\min}^{(n)} - \Phi_{1\min}^{(n+1)} > 0 \ .$$

На цьому можна закінчити розгляд процедури вибору оптимальних (в сенсі мінімуму квадратичної нев’язки) функцій $\alpha_1(x)$ та $\beta_1(s)$, що апроксимують $K(x,s)$ на першому кроці.

Для визначення функцій $\alpha_2(x)$ та $\beta_2(x)$ маємо систему

$$\begin{cases} \alpha_2(s) = \dfrac{\int_a^b K(x,s)\beta_2(s)ds}{\int_a^b \beta_2^2(s)ds} - \dfrac{\alpha_1(x)\int_a^b \beta_1(s)\beta_2(s)ds}{\int_a^b \beta_2^2(s)ds}, \\ \beta_2(t) = \dfrac{\int_a^b K(x,s)\alpha_2(x)dx}{\int_a^b \alpha_2^2(x)dx} - \dfrac{\beta_1(t)\int_a^b \alpha_1(x)\alpha_2(x)dx}{\int_a^b \alpha_2^2(x)dx}. \end{cases} \qquad (21)$$

Перемноживши перше з рівнянь (21) на $\alpha_1(s)$ та проінтегрувавши по x, отримаємо

$$\int_a^b \alpha_1(x)\alpha_2(x)dx = \frac{\int_a^b \alpha_2(x)\int_a^b K(x,s)\beta_2(s)dsdx}{\int_a^b \beta_2^2(s)ds} - \frac{\int_a^b \alpha_2^2(x)dx\int_a^b \beta_1(s)\beta_2(s)dsdx}{\int_a^b \beta_2^2(s)ds}.$$

Звідки

$$\int_a^b \alpha_1(x)\alpha_2(x)dx = 0$$

та аналогічно

$$\int_a^b \alpha_1(x)\alpha_2(x)dx = 0.$$

Таким же чином можна показати, що всі інші $\alpha_j(x)$ та $\beta_j(s)$ ортогональні між собою. Очевидно, що розв'язуючи систему (22) методом послідовних наближень, початкове значення $\beta_2^{(0)}(s)$ має вибиратись не рівним $\beta_1(s)$, так як нове ядро $K(x,s) - \alpha_1(x)\beta_1(s)$ не містить в якості власних функцій $\beta_2(s)$.

Отже, за допомогою описаної процедури здійснено перехід до апроксимації функцій двох змінних білінійним рядом (тобто до відомої формули (2)), який збігається до функції $K(x,s)$ в середньому. В випадку рівномірної збіжності у формулі (2) можна поставити знак рівності (при $N \to \infty$). Доведення збіжності в середньому можна знайти, наприклад, в [1].

Висновок. Таким чином розглянуті чисельні алгоритми наближення функцій двох змінних, дозволяють отримувати апроксимуючі ряди з мінімальною кількістю членів в порівняні з іншими методами. Крім того вони суттєво орієнтовані на комп'ютерну реалізацію, оскільки не потребують аналітичних передумов і перетворень.

Список використаних джерел:

1. Верлань А.Ф. Способ аппроксимации ядер при решении интегральных уравнений на аналоговых и гибридных вычислительных машинах / А.Ф. Верлань. — В кн.: Гибрид. вычисл. машины и комплексы : тез. докл. — К. : Наук. Думка, 1972, — С. 18.

2. Верлань А.Ф. Комбинированный метод аппроксимации ядер интегральных уравнений / А.Ф. Верлань, И.Е. Ефимов // Точность и надежность кибернетических систем, — 1974, — Вып. 2, — С. 68—74.
3. Колмогоров А.И. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одной переменной и умножения / А.И. Колмогоров // ДАН СССР, — 1957, 114, — № 5, — С. 953—956.
4. Шура-Бура М.Р. Аппроксимация функций многих переменных функциями каждая из которых зависит от одного переменного / М.Р. Шура-Бура // Вычислительная математика, — 1957, — сб. 2, — С. 3—19.
5. Михлин С.Г. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений / С.Г. Михлин, Х.Л. Смолицкий. — М. : Наука, 1965. — 383 с.

Iterative algorithms for approximation of functions of two variables by sums of even products of functions of one variable, which are formed in the sense of minimizing the quadratic residuals is consider.

Key word: *approximation, numerical algorithm, the function of two variables, the squared residuals*

Отримано: 27.11.2009